Całki wielokrotne

1 Gęstość kwadratowej płyty o boku długości 2 m, której lewy dolny róg znajduje się w początku układu współrzędnych, wynosi $\rho = 2x^3y$ $(\mathrm{g/m^2})$. Znajdź masę M płyty.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

2 W każdym punkcie kulistego izolatora o promieniu 5 m znajduje się ładunek o stałej gęstości $\rho = 3$ $\mu\mathrm{C/m^3}$. Znajdź całkowity ładunek wewnątrz kuli.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

3 Jeżeli gęstość w dowolnym punkcie okrągłego dysku o promieniu R jest równa iloczynowi 4 $\mathrm{g/m^2}$ i odległości punktu od środka dysku, oblicz masę całkowitą dysku.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

Odpowiedzi

1 16 g

Pytanie **Rozwiązanie**

2 500π μC

Pytanie **Rozwiązanie**

3 $\dfrac{8\pi R^3}{3}$ g

Pytanie **Rozwiązanie**

Rozwiązania

1 Masa M dana jest jako $M = \int_A \rho \, \mathrm{d}A = \int_x \int_y \rho \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, czyli:

$$
\begin{aligned}
M &= \iint\limits_{\text{płyta}} 2x^3 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^2 2x^3 y \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \left[\frac{2x^4}{4} y \right]_{x=0}^{2} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 8y \, \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{8y^2}{2} \right]_{y=0}^{2} \\
&= 16 \text{ g}.
\end{aligned}
$$

Pytanie Odpowiedź

2 Całkowity ładunek dany jest jako $Q = \int_V \rho \, \mathrm{d}V = \int_\phi \int_\theta \int_r \rho r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$, czyli:

$$
\begin{aligned}
Q &= \iiint\limits_{\text{kula}} 3r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left[\int_{r=0}^{5} 3r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left[r^3 \sin\theta \right]_{r=0}^{5} \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} 125 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[(-125\cos\theta) \right]_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} (-125)\big((-1) - 1\big) \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} 250 \, \mathrm{d}\phi \\
&= \left[250\phi \right]_{\phi=0}^{2\pi} \\
&= 500\pi \ \mu\text{C}.
\end{aligned}
$$

Pytanie Odpowiedź

3 Masa dana jest jako $M = \int_A \rho \, \mathrm{d}A = \int_r \int_\theta \rho r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$, czyli:

$$
\begin{aligned}
M &= \iint_{\text{dysk}} 4r \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta, \text{ gdzie } \rho = 4r \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R 4r^2 \, \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{4r^3}{3} \right]_{r=0}^{R} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4R^3}{3} \cdot 2\pi \\
&= \frac{8\pi R^3}{3} \text{ g}.
\end{aligned}
$$

Pytanie Odpowiedź